Үш дене есебі. Шектелген үш дене мәселесі. Либрация нүктелері

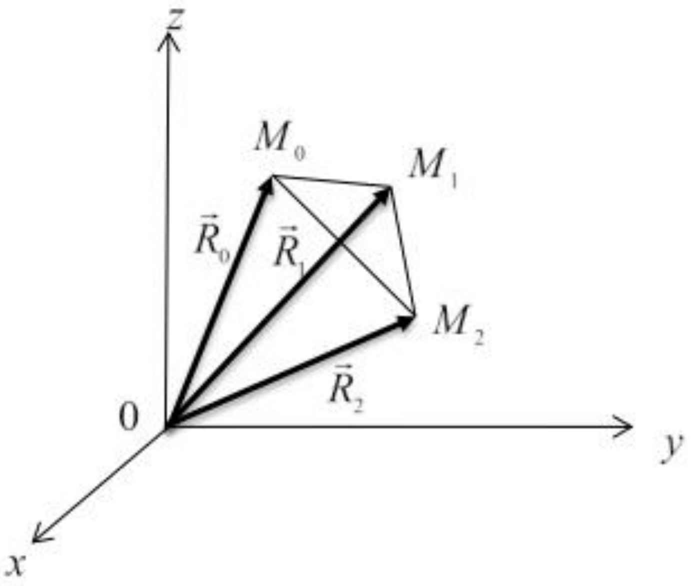
Аға оқытушы: Байсбаева О.Б.

Үш дене есебі

Нақты аспан денелер жүйесінің қозғалыс моделін алу үшін үш дене есебі қарастырылады. Бұл есеп – өзара тартылыс күштер өрісіндегі үш материалдық нүктенің қозғалысын сипаттайды. Бұл үштік жұлдыздық жүйелер: «Жер-Ай-Күн», «Күн-планета-комета», «Жер-Ай-ЖЖС» және тағы басқалар.

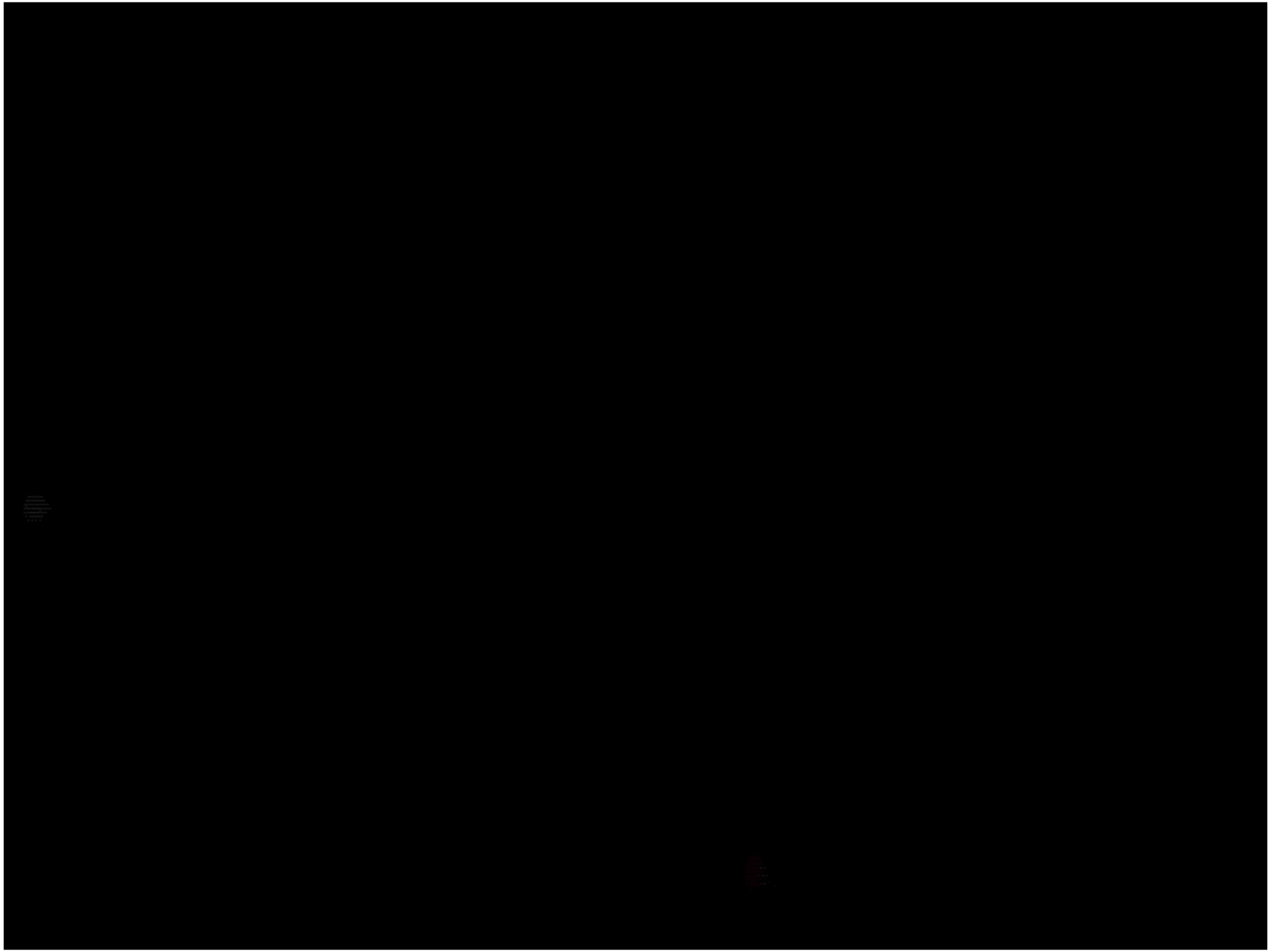
Инерциалды координат жүйесіндегі үш дене есебінің теңдеулерін көп дене есебінің дербес жағдайы (n = 2) ретінде қарастыруға болады (1 сурет):

$$
\begin{aligned}
\ddot{\vec{R}}_0 &= Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{\Delta_{01}^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{\Delta_{02}^3}, \\
\ddot{\vec{R}}_1 &= Gm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{\Delta_{01}^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\Delta_{12}^3}, \\
\ddot{\vec{R}}_2 &= Gm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_2}{\Delta_{02}^3} + Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{\Delta_{12}^3}.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$



1 сурет – Инерциалды координат жүйесіндегі үш дене есебі

Үш дене есебі 3D бейнесі:



Үш дене есебі 3D бейнесі:

Қозғалыс теңдеулері

Егер M_1, M_2, M_3 денелерінің массалары сәйкесінше m_1, m_2, m_3 арқылы белгіленсе, онда үш дененің барицентрлік теңдеулерін келесі түрде жазылады:

$$m_1\ddot{\overrightarrow{s_1}} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\overrightarrow{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{31}^3}\overrightarrow{r_{31}}$$
$$m_2\ddot{\overrightarrow{s_2}} = \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3}\overrightarrow{r_{23}} - \frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}\overrightarrow{r_{12}} \qquad (2)$$
$$m_3\ddot{\overrightarrow{s_3}} = \frac{Gm_3m_1}{r_{31}^3}\overrightarrow{r_{31}} - \frac{Gm_3m_2}{r_{23}^3}\overrightarrow{r_{23}}$$

Мұндағы, $\overrightarrow{r_{12}} = -\overrightarrow{r_{21}} = \overrightarrow{s_2} - \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{r_{23}} = -\overrightarrow{r_{32}} = \overrightarrow{s_3} - \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{r_{31}} = -\overrightarrow{r_{13}} = \overrightarrow{s_1} - \overrightarrow{s_3}$

Осы қатынастарды пайдаланып салыстырмалы координаттар жүйесіндегі қозғалыс теңдеулерін ала аламыз

$$\ddot{\overrightarrow{r_{12}}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r_{12}^3}\overrightarrow{r_{12}} + \frac{Gm_3}{r_{23}^3}\overrightarrow{r_{23}} + \frac{Gm_3}{r_{31}^3}\overrightarrow{r_{31}}$$
$$\ddot{\overrightarrow{r_{23}}} = -\frac{G(m_3+m_2)}{r_{23}^3}\overrightarrow{r_{23}} + \frac{Gm_1}{r_{31}^3}\overrightarrow{r_{31}} + \frac{Gm_1}{r_{12}^3}\overrightarrow{r_{12}} \qquad (3)$$
$$\ddot{\overrightarrow{r_{31}}} = -\frac{G(m_1+m_3)}{r_{31}^3}\overrightarrow{r_{31}} + \frac{Gm_2}{r_{12}^3}\overrightarrow{r_{12}} + \frac{Gm_2}{r_{23}^3}\overrightarrow{r_{23}}$$

Өкінішке орай, үш дене есебінің қозғалыс теңдеулерінің жалпы шешімін шектеулі аналитикалық түрде алу мүмкін емес. Бірақ бұл теңдеулер шектелген үш дене есебінде қарастырылған стационарлық шешімдерге ұқсас қарапайым нақты шешімдердің болуына мүмкіндік береді. Бұл Эйлер тапқан түзу сызықты (коллинеар) шешімдер және Лагранж тапқан үшбұрышты шешімдер.

Шектелген үш дене есебі

Мәселе атауындағы шектелген сөзі үш дене мәселесіне қандай да бір шектеу(болжам) қойылғанын білдіреді. Бұл шектеу әдетте денелердің біреуінің массасының жоғалатын аз(кіші) мәнге ие болуымен байланысты. Егер шектелген үш дене есебі пен бастапқы үш дене есебінің арасындағы айырмашылықты атап көрсеткіңіз келсе, онда соңғысы жалпы үш дене есебі деп аталады. Шектелген есеп жалпы есептен бір дененің массасы нөлге ұмтылған кезде шекке өту арқылы алынады. Бұл денені әдетте массасы кіші (немесе «нөл») дене деп атайды, ал қалған денелерді негізгі деп атайды.

Материалдық нүктелердің біреуі - ғарыштық аппарат болған кезінде, үш дененің қозғалысы осы есеп бойынша анықталады. Кіші массасы бар материалдық нүкте басқа екі дененің («ауыр нүктелер») гравитациялық өрістерінде қозғалады және солардың қозғалыстарына ешқандай әсер етпейді, бұл осы есептің негізгі физикалық мағынасы. Сонда басқа екі дененің қозғалысы белгілі кеплер қозғалысы болады. Осыған сәйкес үш дененің шектеулі есебі шеңберлік, эллипстік және тағы басқа түрлерінде болады.

Негізгі денелер қозғалатын траекторияларға байланысты шектелген үш дене есебі келесіге бөлінеді:

- \- шеңберлік, негізгі денелер шеңбер орбитада қозғалғанда,
- \- эллипстік, негізгі денелер эллипстік орбитада қозғалғанда,
- \- параболалық шектелген үш дене мәселесі,
- \- гиперболалық шектелген мәселе және
- \- түзу сызықты есеп, ол өз кезегінде түзу сызықты эллиптикалық, параболалық және гиперболалық шектелген үш денелі есептер болып бөлінеді.

Үш дененің шектеулі шеңберлік есебі

C массасы бар екі ауыр нүктелер M_1, M_2 бір-бірінен а - тұрақты арақашықтықта орналасқан және бір дене екіншісін немесе олардың масса центрін айналып, тұрақты бұрыштық жылдамдығымен

$$n = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^{3/2}} \tag{4}$$

қозғалады.

(1) үш дене есебінің соңғы екі теңдеуінде оң жағындағы бірінші қосындылары болмайды және осы теңдеулер белгілі шешімі бар екі дене есебінің теңдеулер жүйесін құрастырады. Бірінші теңдеу m - кіші массасы бар нүктенің қозғалыс теңдеуі

$$\vec{R} = Gm_1 \frac{\overrightarrow{\ddot{R_1}} - \vec{R}}{\rho_1^3} + Gm_2 \frac{\overrightarrow{\ddot{R_2}} - \vec{R}}{\rho_2^3} \tag{5}$$

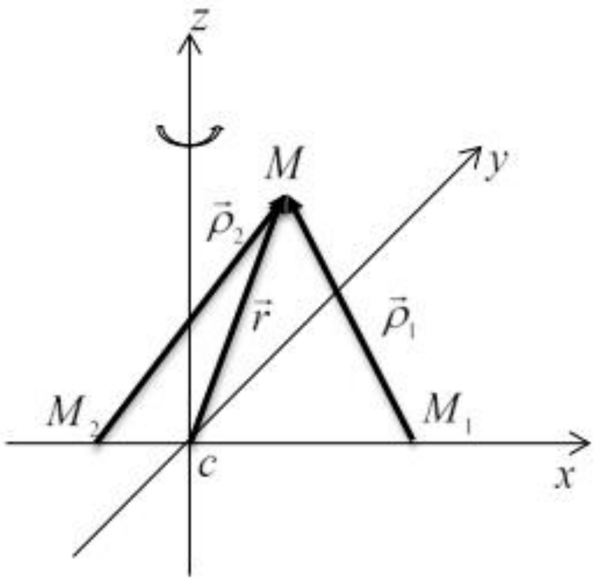
осында $\rho_{1,2}$ - M нүктенің $M_{1,2}$ нүктелерге дейінгі қашықтық. Бұл есепте n бұрыштық жылдамдығымен масса центрін айналатын барицентрлік координат жүйесін қолдану тиімді, сонда үш дененің шектеулі есебі екі жылжымайтын центр есебіне ұқсас болады. Бірақ бұл есептердің принципиалды айырмашылығы болады:

1. екі жылжымайтын центр есебінде үшінші нүктенің қозғалысы инерциалды координат жүйесінде болады және екі ауыр нүктенің күйіне есептің шарты бойынша үшінші нүкте әсер етпейді;
2. үш дененің шектеулі есебінде үшінші нүкте инерциалды емес координат жүйесінде қозғалады және екі ауыр нүктенің күйіне, массасы кіші болғандықтан, үшінші нүкте әсер етпейді.

Инерциалды емес координат жүйесіндегі M нүктенің қозғалыс теңдеуін алу үшін, бірқалыпты айналатын координат жүйесіндегі материалдық нүктеге әсер ететін инерция күштерін (Кориолис күші $\left(2\vec{n}\times\vec{r}\right)$ және ортадан тепкіш күш $(\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{r})$) ескеру қажет. Сонда

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} - Gm_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \quad (6)$$

осында $\vec{n}$- координат жүйесінің бұрыштық жылдамдығының векторы, $\vec{r}$ - М нүктенің радиус-векторы, $\overrightarrow{\rho_{1,2}} = \vec{r} - \overrightarrow{r_{1,2}} - M$нүктенің $M_{1,2}$ ауыр нүктелерге қарағанда орналасуын анықтайтын радиус-векторлары, $\overrightarrow{r_{1,2}}$ - $M_{1,2}$ нүктелердің радиус-векторлары (2 сурет).



2 сурет – Үш дененің шеңберлік шектеулі есебі

Осы жағдайда координат жүйесінің z осі $\vec{n}$ вектордың бойымен бағытталған және x осі M_1 мен M_2 нүктелер арқылы өтеді. Сонда координаттық формасында жазылған (6) теңдеуі

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2 x + Gm_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1^3} + Gm_2 \frac{x_2 - x}{\rho_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - Gm_1 \frac{y}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{y}{\rho_2^3}, \\ \ddot{z} &= -Gm_1 \frac{z}{\rho_1^3} - Gm_2 \frac{z}{\rho_2^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Арнайы бірлік (каноникалық) жүйесін енгіземіз: ұзындық бірлігі ретінде а қашықтықты, масса бірлігі ретінде - $m_1 + m_2$ массалар қосындысын және уақыт бірлігі ретінде – координат жүйесі 1 радианға бұрылған кезіндегі кететін уақытты аламыз. Сонда n бұрыштық жылдамдығының шамасы 1 тең және осы бірлік жүйесінде G гравитациялық тұрақтысы да 1 тең болады. M_1 нүктенің массасын осы бірлік жүйесінде μ арқылы белгілегенде, M_2 нүктенің массасы 1− μ тең болады. Сонда M_1 нүктесі - (1− μ,0,0) және M_2 нүктесі - (− μ,0,0) координаттарымен беріледі. Егер $m_1 < m_2$ немесе μ < 1/2 болса, (7) теңдеулер жүйесі келесі түріне айналады

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1-\mu-x) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(\mu-x),\\
\ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}y,\\
\ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ салыстырмалы жылдамдық векторының компоненттеріне (8) теңдеулер жүйесін көбейту және оларды өзара қосу арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2}\right), \qquad (9)$$

осында $v^2 = \left|\dot{\vec{r}}\right|$. (9) теңдеуді интегралдау арқылы үш дененің салыстырмалы шектеулі шеңберлік есебінің бірінші интегралын – **Якоби интегралын** аламыз

$$v^2 = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right) - c. \qquad (10)$$

Якоби интегралы энергия интегралының аналогы болады, себебі теңдеудің оң жағынан есептің жалпыланған потенциалы бар. Бұл интеграл үш дене есебіндегі орнықтылықты зерттеу үшін қолданылады.

Либрация нүктелері

Бір сызық бойымен бағытталмаған екі ауыр нүктенің күш әсерінен инерциалдық жүйеде үш дене есебіндегі кіші массасы бар дене ауыр нүктелерге қарағанда тепе-теңдік жағдайында бола алмайды. Салыстырмалы жүйеде осындай нүкте әр түрлі бағытталған үш күш әсерінде болады (екі гравитациялық күштер және ортадан тепкіш күш), сондықтан осында да тепетеңдік күйі болуы мүмкін емес. Үш дененің шектеулі жазықты шеңберлік есебінде кіші массасы бар нүктенің тепе-теңдік күйі кейбір орналасу кезінде болады. Осы салыстырмалы тепе-теңдік орналасу нүктелерін – либрация нүктелері деп атайды.

Тепе-теңдік күйінде $\ddot{Z}$ үдеуі және $\dot{Z}$ жылдамдығы 0 тең болады. Сондықтан Z комплекстік координата осы теңдеуге сәйкес келу керек

$$Z+\frac{\mu}{\rho_1^3}(1-\mu-Z)-\frac{1-\mu}{\rho_2^3}(\mu+Z)=0 \qquad (11)$$

Немесе

$$Z\left(1-\frac{\mu}{\rho_1^3}-\frac{1-\mu}{\rho_2^3}\right)=\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{1}{\rho_2^3}\right). \qquad (12)$$

(12) теңдеудің оң жақ бөлігі нақты болса, Z координатасы нақты болу керек немесе оң жақтағы бөлігі мен сол жақтағы жақша ішінде орналасқан нақты көбейтіндісі 0 тең болу керек.

Егер (12) оң жақ бөлігі 0 тең болса, $\rho_1 = \rho_2$ және егер (12) сол жақтағы жақша ішінде орналасқан нақты көбейтіндісі 0 тең болса, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ болады. M_1 мен M_2 нүктелер арасында қашықтық 1 тең болады және осы үш нүкте теңқабырғалы үшбұрышты құрайды. Осы кезде екі конфигурация болу мүмкін – біреуі - у > 0, екіншісі - у < 0 координаттарында. Бұл нүктелер либрацияның үшбұрыш нүктелері деп аталады және L_4 мен L_5 арқылы белгіленеді.

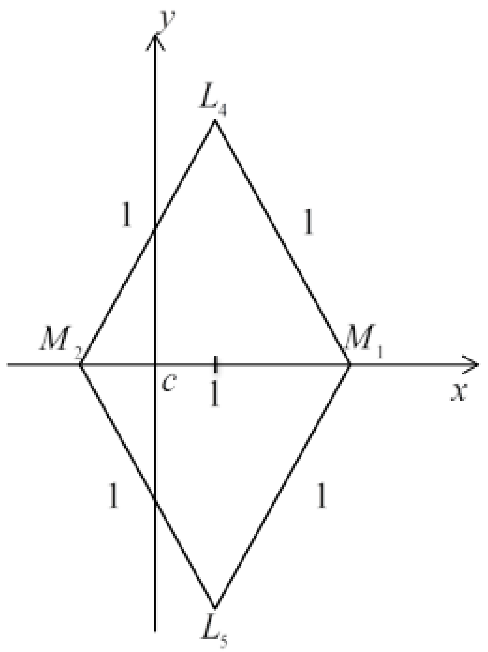
Егер Z координатасы нақты болса, барлық либрация нүктелері бір сызықтың бойында орналасады. Осы кезде $M_{1,2}$ нүктелерге дейінгі қашықтықтары мен координаттары белгілі бір теңдеулерімен байланысады. Теңдеулердің түрлері кіші массасы бар нүктенің орналасуына байланысты болады. Нүктенің әр түрлі орналасу жағдайларын қарастыруға болады.

а) М нүктесі M_1 және M_2 ауыр нүктелер арасында орналасқанда (4,а сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \qquad \mu + Z + \rho_1 = 1. \tag{13}$$

(12) теңдеуінен (13) көмегімен ρ_2 және Z жоққа шығару арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$(1-\mu-\rho_1)\left(1+\frac{\mu}{\rho_1^3}+\frac{1-\mu}{(1-\rho_1)^3}\right)=\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{1}{(1-\rho_1)^3}\right). \tag{14}$$



3 сурет – Либрацияның үшбұрыш нүктелері

(14) теңдеуін түрлендіру арқылы ρ_1 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_1^5 - (3-\mu)\rho_1^4 + (3-2\mu)\rho_1^3 - \mu(1-\rho_1)^2 = 0. \qquad (15)$$

ә) М нүктесі M_1 ауыр нүктенің оң жағынан орналасқанда (4,ә сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + Z - \rho_1 = 1. \qquad (16)$$

Осы кезде ρ_1 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_1^5 + (3-\mu)\rho_1^4 + (3-2\mu)\rho_1^3 - \mu(1+\rho_1)^2 = 0. \qquad (17)$$

б) М нүктесі M_2 ауыр нүктенің сол жағынан орналасқанда (4,б сурет), келесі байланыс теңдеулері қолданылады

$$\rho_1 = 1 + \rho_2, \quad \rho_2 = \mu + Z. \qquad (18)$$

Осыдан ρ_2 қашықтық үшін бесінші дәрежедегі алгебралық теңдеуін аламыз

$$\rho_2^5 + (2+\mu)\rho_2^4 + (1-2\mu)\rho_2^3 - (1-\mu)(1+\rho_2)^2 = 0. \qquad (19)$$

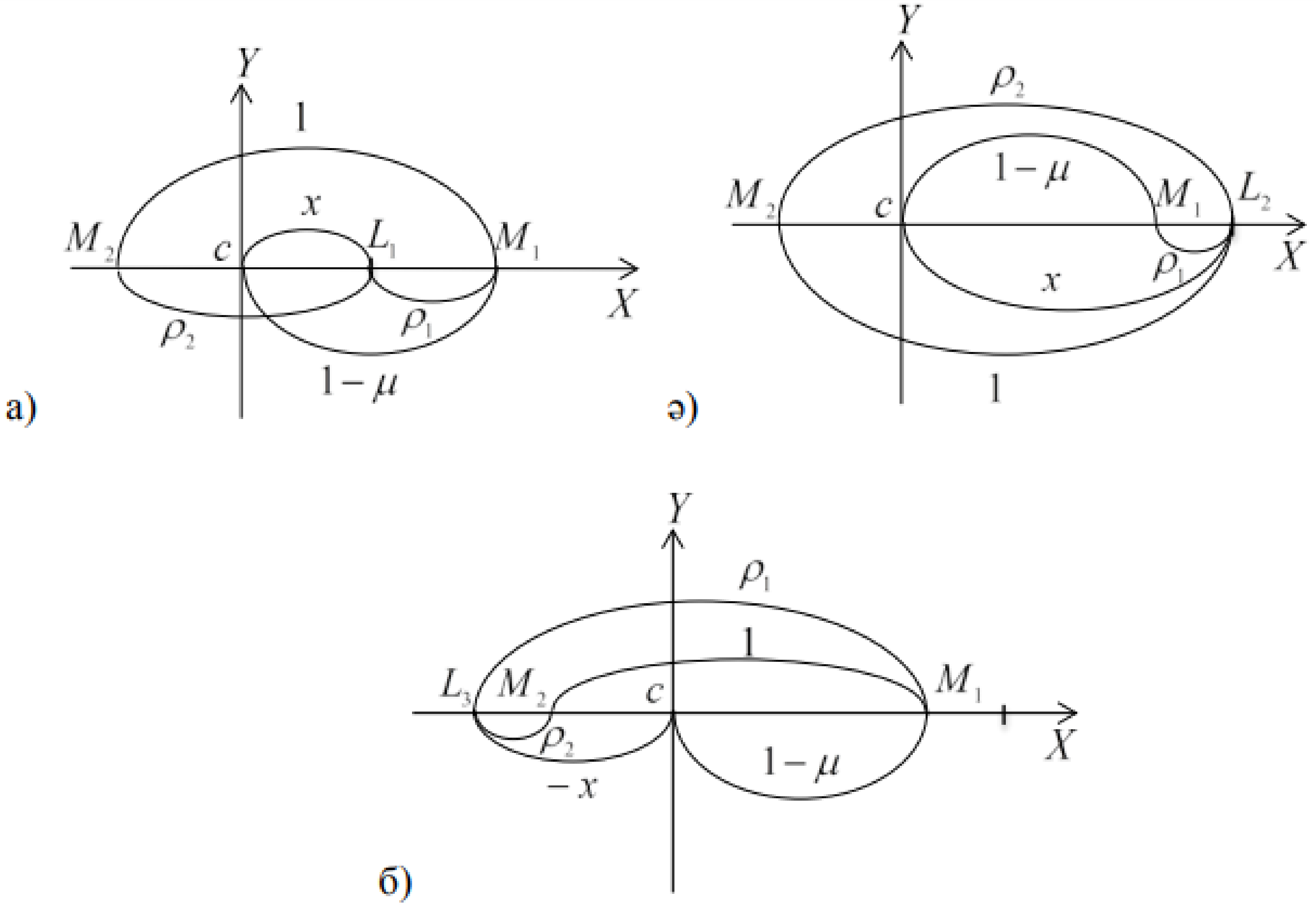
Сонда 3 либрацияның түзусызықты нүктелері болады. Әр жағдайға сәйкес L_1, L_2, L_3белгіленулер енгізіледі. ρ_1 мен ρ_2 қашықтықтар итерация әдісімен анықталады. Мысалы, L_1 нүктесі үшін

$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu \left(1-\rho_1^{(k-1)}\right)^2}{\left(\rho_1^{(k-1)}\right)^2 - (3-\mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3}. \qquad (20)$$

μ дәрежесі бойынша ρ_1 мәндері үшін және μ дәрежесі бойынша ρ_2 мәндері үшін келес қатарларды алуға болады

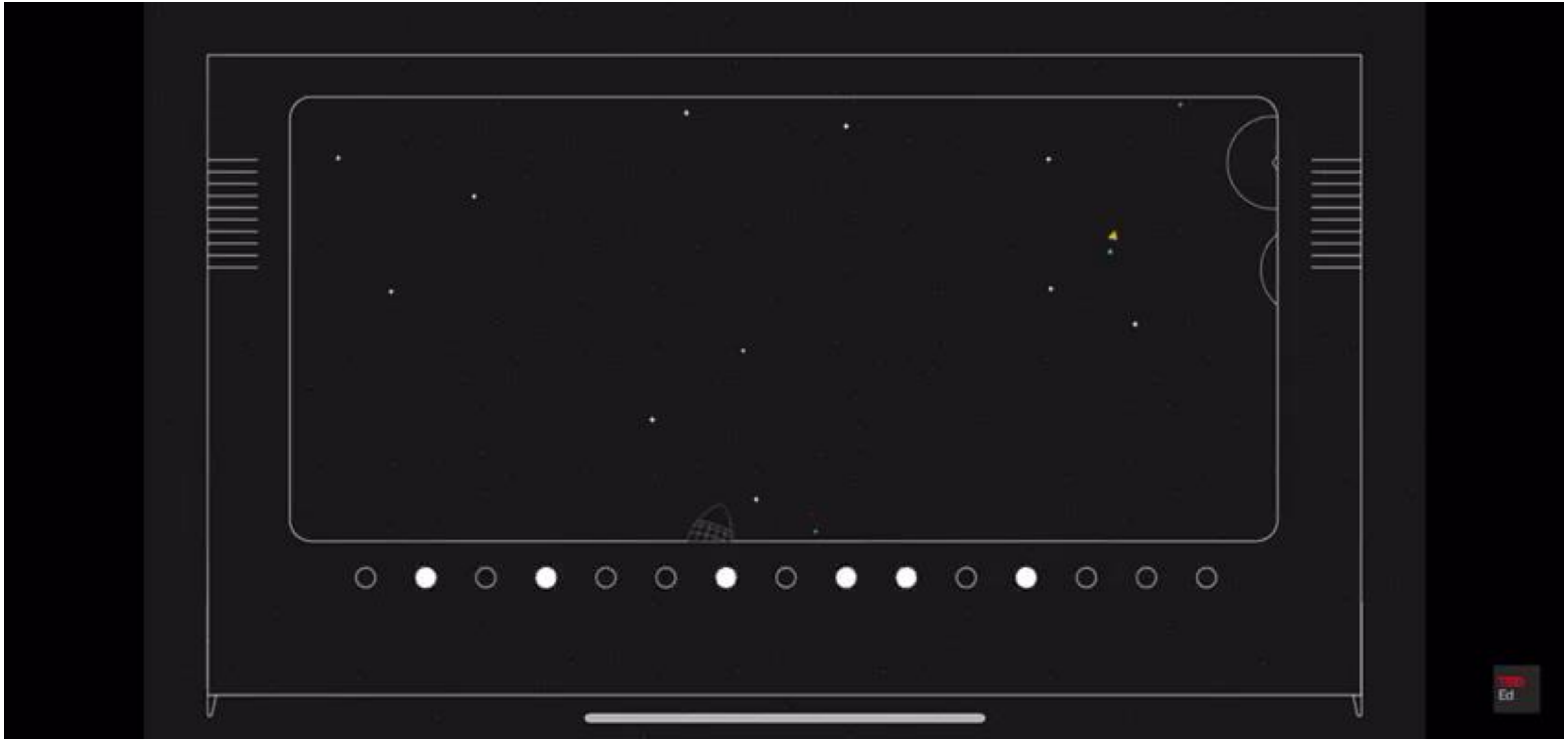
$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\mu^{2/3} - \frac{1}{27}\mu + \ldots, && (L_1) \\
\rho_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\mu^{2/3} - \frac{1}{27}\mu + \ldots, && (L_2) \qquad (21) \\
\rho_2 &= \frac{7}{12}\mu - \frac{1127}{20736}\mu^3 + \ldots. && (L_3)
\end{aligned}$$

μ<<1 мәндерінде L_1 мен L_2 либрация нүктелері M_1 нүктесіне бірдей қашықтықта жақын орналасады.



19 сурет – Либрацияның түзусызықты нүктелері

Шектелген үш дене мәселесі 3D



Лагранждың үшбұрыштық шешімі